Sommerschule 2009 Universität Würzburg

Algebra, Zahlentheorie und Riemannsche Flächen, 21.09. – 26.09.2009

Weil-Funktionen und Dessins

Patrick Reichert

Gliederung des Vortrags

1. Historischer Abriß: Doppelt-periodische Funktionen
2. Elliptische Kurven mit n-Torsionspunkt
3. Wann ist eine Weil-Funktion eine Belyi-Funktion ?
4. Beispiele von Galois-konjugierten Belyi-Graphen

Teil 1: Historischer Abriß: Doppelt-periodische Funktionen

Integrale der Form $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{p(t)}}$, wobei $p(t)$ eine reelles Polynom 3. oder 4. Grades ist, werden **elliptische Integrale** genannt, da sie bei der Bestimmung der Bogenlänge von Ellipsen, Hyperbeln und der Lemniskate $p(t) = 1 - t^4$ auftreten.

Erste Erwähnungen in der Literatur:

- John Wallis (1616 – 1703)
- Jacob Bernoulli (1654 – 1705)

Fagnanos Entdeckung

Guilio Carlo Fagnano (1682 – 1766) entdeckte 1750 eine unerwartete Eigenschaft von

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}, \quad 0 \le x \le 1.$$

Satz von Fagnano: Für alle hinreichend kleinen $x \ge 0$ gilt

$$2\,F(x) = F\left(2x \cdot \frac{\sqrt{1-x^4}}{1+x^4}\right)$$

Der Satz von Euler

Leonhard Euler (1707 – 1783) zeigte 1761 ein allgemeines Additionstheorem für die Umkehrfunktion G von F:

$$G'^2 = 1 - G^4,\ G(0) = 0,\ G'(0) = 1$$

Satz von Euler: Für alle hinreichend kleinen $u, v \geq 0$ gilt

$$G(u+v) = \frac{G(u)\, G'(v) + G(v)\, G'(u)}{1 + G^2(u)\, G^2(v)}$$

Diese Umkehrfunktion G ist doppelt-periodisch:

- $G(u+v) = G(u)$ für alle $u \in \mathbb{C}$, falls $v \in \mathbb{C}$ fest gewählt wird mit $G(v) = 0$, $G'(v) = 1$.
- $G(u+iv) = G(u)$ für alle $u \in \mathbb{C}$, da $G(ui) = i\, G(u)$.

Theorie der elliptischen Funktionen

- Nach 1761 schlägt Euler vor, elliptische Integrale und ihre doppelt-periodischen Umkehrfunktionen als selbständige Funktionenklasse in die Analysis einzuführen.
- Adrien-Marie Legendre (1752 – 1833) unterstützte diese Auffassung voll.
- Entwicklung der Theorie der elliptischen Funktionen: Niels Hendrik Abel (1802 – 1829) und Carl Gustav Jacob Jacobi (1804 – 1851).
- Literatur, die doppelte Periodizität in den Mittelpunkt stellt: Joseph Liouville (1809 – 1882), Heinrich Burkhardt (1861 – 1914), Adolf Hurwitz-Courant (1922).

Doppelt-periodische Funktionen

Definition 1 *Eine meromorphe Funktion f auf $\mathbb{C}$ heißt **elliptisch** oder **doppelt-periodisch** bezüglich eines Gitters $\Omega = \mathbb{Z}\,\omega_1 + \mathbb{Z}\,\omega_2 \subset \mathbb{C}$, wenn Ω in der Menge der Perioden von f enthalten ist, wenn also konkret gilt:*

(1) $f(z+\omega) = f(z)$ *für alle* $\omega \in \Omega$ *und* $z \in \mathbb{C} \setminus D_f$,

(2) $D_f + \omega = D_f$ *für alle* $\omega \in \Omega$,

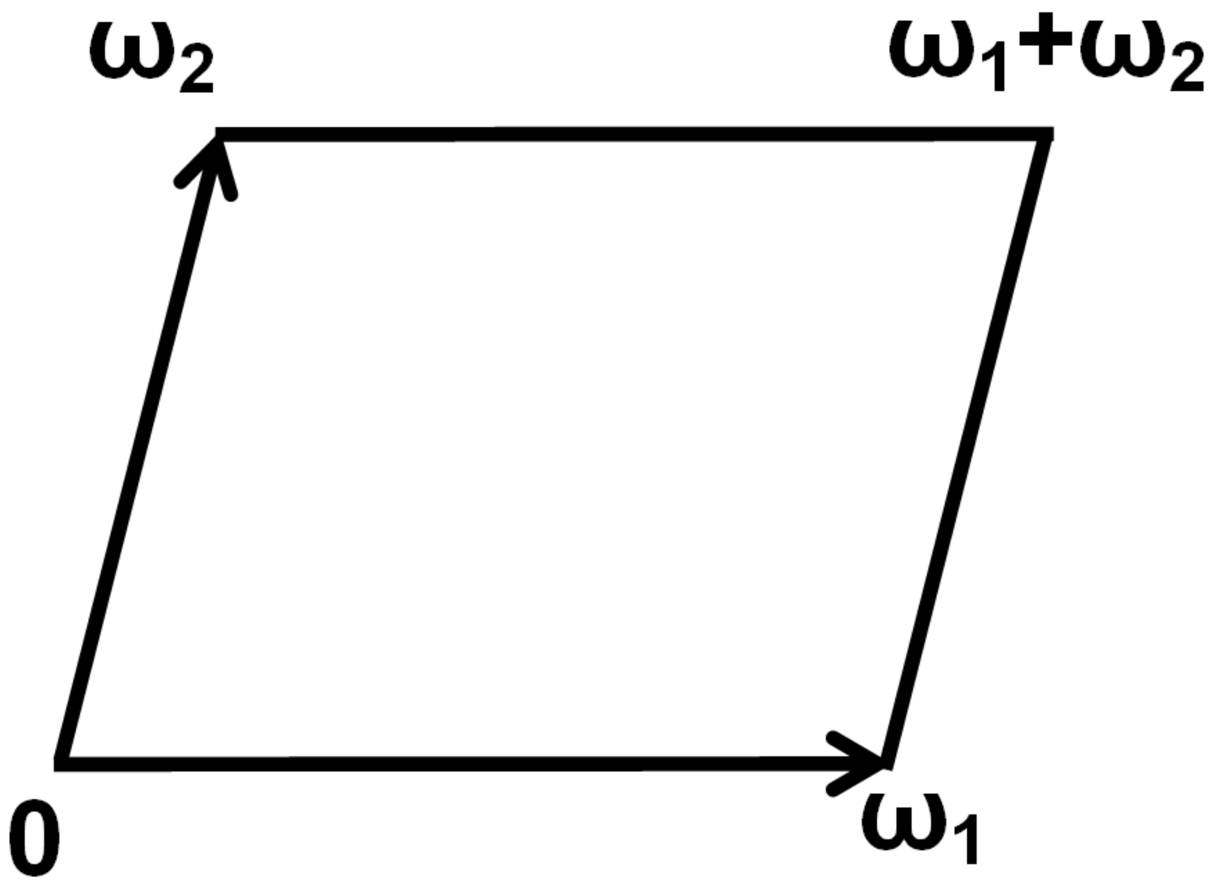
wobei D_f *die Menge der Polstellen bezeichne.*

Periodenparallelogramm für Gitter $\Omega = \mathbb{Z}\,\omega_1 + \mathbb{Z}\,\omega_2$

Für $u \in \mathbb{C}$ heißt

$$\{u + \alpha_1\,\omega_1 + \alpha_2\,\omega_2 \,|\, 0 \le \alpha_1 < 1, 0 \le \alpha_2 < 1\}$$

Periodenparallelogramm bezüglich Ω mit **Basispunkt** u.



Besondere Eigenschaften elliptischer Funktionen

Im Jahr 1847 bemerkte Joseph Liouville (1809 – 1882), dass für elliptische Funktionen erhebliche, zunächst nicht erkennbare Einschränkungen gelten.

Sätze von Liouville:

(1) Ist eine elliptische Funktion holomorph (besitzt also keine Pole), dann ist sie konstant.

(2) Ist f eine nicht-konstante elliptische Funktion auf dem Gitter Ω, so gilt (wenn man mit den entsprechenden Vielfachheiten zählt):

$$\begin{aligned}\text{Anzahl der Pole von } f &= \text{Anzahl der Nullstellen von } f \\ &= \text{Anzahl der } w\text{-Stellen von } f\end{aligned}$$

für jedes $w \in \mathbb{C}$. Speziell nimmt jede nicht-konstante elliptische Funktion im Periodenparallelogramm jeden Wert an.

(3) Ist $f \neq 0$ eine elliptische Funktion auf dem Gitter Ω und P ein Periodenparallelogramm, so gilt

$$\sum_{c \in P} \operatorname{ord}_c(f) \cdot c \in \Omega.$$

Bezeichnet man folglich die Nullstellen einer nicht-konstanten elliptischen Funktion f mit $a_1, \ldots, a_n$ und die Polstellen mit $b_1, \ldots, b_n$, wobei Punkte gemäß der Vielfachheiten wiederholt werden, so gilt

$$a_1 + \ldots + a_n \equiv b_1 + \ldots + b_n \pmod{\Omega}.$$

Man nennt n die Ordnung der elliptischen Funktion f.

Existenzsatz für elliptische Funktionen

Sei $\Omega = \mathbb{Z}\,\omega_1 + \mathbb{Z}\,\omega_2$ ein Gitter in $\mathbb{C}$.

Seien $a_1, \ldots, a_n$ und $b_1, \ldots, b_n$ zwei endliche Folgen aus $\mathbb{C}$, für welche die Mengen $\{a_1 + \Omega, \ldots, a_n + \Omega\}$ und $\{b_1 + \Omega, \ldots, b_n + \Omega\}$ disjunkt sind und für die

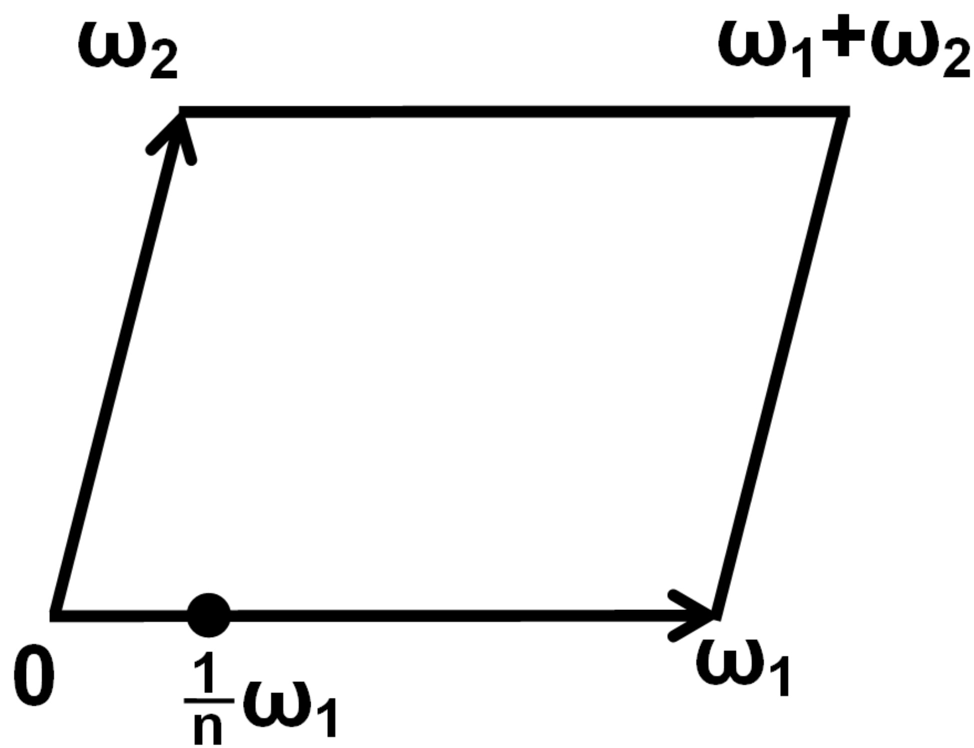
$$a_1 + \ldots + a_n \equiv b_1 + \ldots + b_n \pmod{\Omega}$$

gilt. Dann gibt es eine elliptische Funktion auf dem Gitter Ω, die genau an den Stellen $a_1 + \Omega, \ldots, a_n + \Omega$ Nullstellen und an den Stellen $b_1 + \Omega, \ldots, b_n + \Omega$ Pole besitzt.

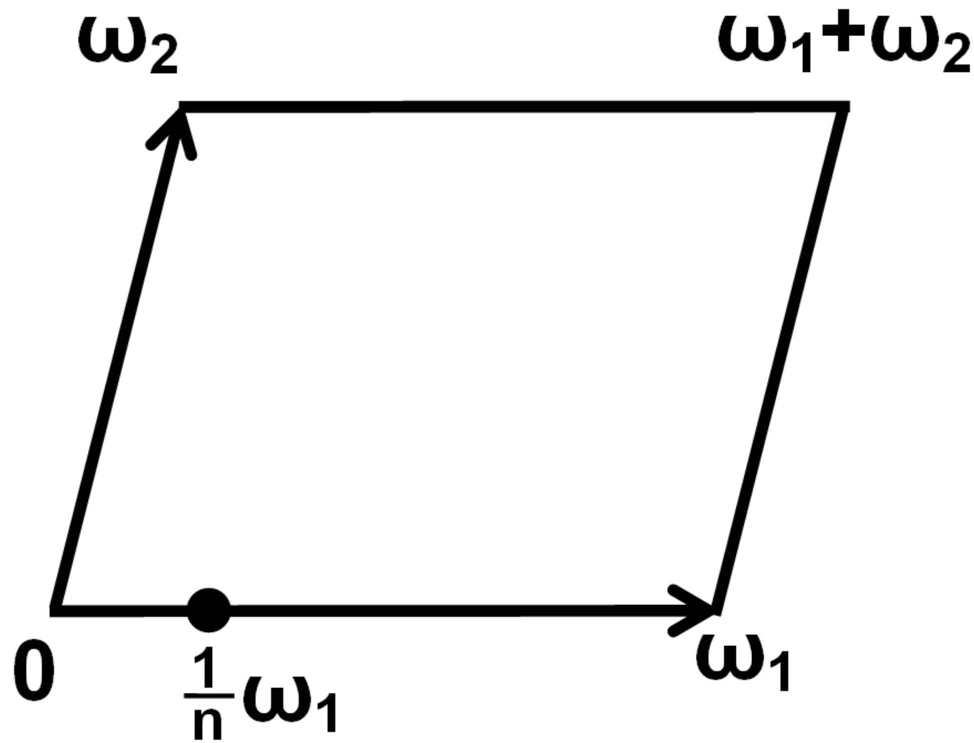
Weil-Funktionen für Gitter

Die vorgestellten Theoreme genügen, um die Existenz von sogenannten **Weil-Funktionen** nachzuweisen.

Ist $\Omega = \mathbb{Z}\,\omega_1 + \mathbb{Z}\,\omega_2 \subset \mathbb{C}$ ein Gitter und $n \geq 2$ eine natürliche Zahl, so ist der Punkt $P = \frac{1}{n}\,\omega_1 \in \mathbb{C}$ ein n-Torsionspunkt, da $nP \in \Omega$.



Weil-Funktionen für Gitter (II)



Nach dem Existenzsatz gibt es zu einem n-Torsionspunkt P eines Gitters Ω eine elliptische Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$ der Ordnung n, die n-fache Nullstellen in $P + \Omega$ und n-fache Pole in Ω und ansonsten keine weiteren Null- und Polstellen besitzt.

Eine solche Funktion f wird **Weil-Funktion** genannt.

Weil-Funktionen für elliptische Kurven

Folgerung: Da jedem Gitter $\Omega = \mathbb{Z}\,\omega_1 + \mathbb{Z}\,\omega_2$ bijektiv eine elliptische Kurve E zugeordnet werden kann, erhält man auch hier Weil-Funktionen:

Zu jedem n-Torsionspunkt P einer elliptischen Kurve E gibt es eine meromorphe Funktion $f\colon E \to \overline{\mathbb{C}}$ mit Divisor $\mathrm{div}(f) = n[P] - n[\mathcal{O}]$, dabei ist $\mathcal{O}$ der Basispunkt von E.

Teil 2: Elliptische Kurven über $\mathbb{C}$ mit n-Torsionspunkt

Aufgabe: Finde alle elliptischen Kurven über $\mathbb{C}$ mit n-Torsionspunkt $(0,0)$ für $n \geq 5$.

- Elliptische Kurve über $\mathbb{C}$:

$$E\colon y^2 + a_1\, xy + a_3\, y = x^3 + a_2\, x^2 + a_4\, x + a_6$$

- Die Bedingungen $P = (0,0) \in E$, $2P \neq \mathcal{O}$, $3P \neq \mathcal{O}$ reduzieren die Parameter auf zwei:

$$y^2 + \alpha\, xy + \beta\, y = x^3 + \beta\, x^2$$

- Die Vielfachen von $P = (0,0)$ lauten:

$$
\begin{aligned}
2P &= (-\beta,\ \beta(\alpha-1)) \\
3P &= (1-\alpha,\ \alpha-\beta-1) \\
4P &= \left(-\frac{\beta(\alpha-\beta-1)}{\alpha^2-2\alpha+1},\ -\frac{\beta^2\left(\alpha^2-3\alpha+\beta+2\right)}{\alpha^3-3\alpha^2+3\alpha-1}\right)
\end{aligned}
$$

- Für $n = 5$ muss $2P = -3P$ gelten.

  $\Rightarrow$ x-Koordinate von $2P$ = x-Koordinate von $3P$.

  $\Rightarrow \alpha = 1 + \beta$.

  $\Rightarrow$ Allgemeine Gleichung aller elliptischen Kurven über $\mathbb{C}$, für die $P = (0,0)$ ein 5-Torsionspunkt ist:

$$y^2 + (1+\beta)\,xy + \beta\,y = x^3 + \beta\,x^2$$

- Für $n = 7$ muss $3P = -4P$ gelten, also

$$1 - \alpha = -\frac{\beta\,(\alpha - \beta - 1)}{\alpha^2 - 2\alpha + 1} = \left(\frac{\beta}{\alpha - 1}\right)^2 - \left(\frac{\beta}{\alpha - 1}\right)$$

Setzt man abkürzend $c := -\beta/(\alpha - 1)$, so erhält man

$$1 - \alpha = c^2 + c \;\Rightarrow\; \alpha = 1 - c - c^2$$
$$\beta = -c\,(\alpha - 1) = c^2(c + 1)$$

Allgemeine Gleichung aller elliptischen Kurven über $\mathbb{C}$, für die $P = (0, 0)$ ein 7-Torsionspunkt ist:

$$y^2 + (1 - c - c^2)\,xy + c^2(c + 1)\,y = x^3 + c^2(c + 1)\,x^2$$

Teil 3: Wann ist eine Weil-Funktion eine Belyi-Funktion ?

Formulierung der Fragestellung:

Sei E eine elliptische Kurve über $\mathbb{C}$ mit n-Torsionspunkt P. Dann gibt es eine meromorphe Funktion $f\colon E \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ vom Grad n mit Divisor $\operatorname{div}(f) = n\,[P] - n\,[\mathcal{O}]$, wobei $\mathcal{O}$ der Basispunkt von E ist.

Wann ist die Weil-Funktion eines n-Torsionspunktes nur über drei Punkten verzweigt, also eine Belyi-Funktion ?

Verzweigungspunkte der Weil-Funktion

Divisor der Weil-Funktion:

$$\mathrm{div}(f) = n\,[P] - n\,[\mathcal{O}]$$

Das Differential der Weil-Funktion besitzt den Divisor

$$\mathrm{div}(\mathrm{df}) = (n-1)\,[P] + [B_1] + [B_2] - (n+1)\,[\mathcal{O}]$$

- f ist verzweigt über $f(P) = 0$
- f ist verzweigt über $f(\mathcal{O}) = \infty$
- f ist verzweigt über $f(B_1) = f(B_2)$

  Diese Bedingung muss erfüllt sein, damit f eine Belyi-Funktion ist.

Verzweigungspunkte der Weil-Funktion (II)

Es gibt zwei Fälle:

- **Fall A:** Es gilt $B_1 = B_2$ und damit $f(B_1) = f(B_2)$. Dies erzeugt den Divisor

$$\mathrm{div}(\mathrm{df}) = (n-1)\,[P] + 2\,[B_1] - (n+1)\,[\mathcal{O}]$$

- **Fall B:** Es gilt $B_1 \neq B_2$, aber trotzdem $f(B_1) = f(B_2)$. Hier lautet der Divisor

$$\mathrm{div}(\mathrm{df}) = (n-1)\,[P] + [B_1] + [B_2] - (n+1)\,[\mathcal{O}].$$

Hurwitz-Datum der kritischen Punkte

- Jede Überlagerung $X \xrightarrow{n} \overline{\mathbb{C}}$ ist in endlich vielen Punkten $p_1, \ldots, p_r \in \overline{\mathbb{C}}$ verzweigt.

- Jedem Verzweigungspunkt p_i kann man einen Monodromie-Erzeuger zuordnen, indem man die Blätter der Riemannschen Fläche X und die Art der Verklebungen in p_i betrachtet.

- Hurwitzdatum = Verzweigungsdatum
  - für erste kritische Stelle p_1: Zykellängen $(n_1^{(1)}, \ldots n_{k_1}^{(1)})$
  - für zweite kritische Stelle p_2: Zykellängen $(n_1^{(2)}, \ldots n_{k_2}^{(2)})$
  - ...
  - für r-te kritische Stelle p_r: Zykellängen $(n_1^{(r)}, \ldots n_{k_r}^{(r)})$

Hurwitzdatum der Überlagerung $f: E \to \overline{\mathbb{C}}$

- Fall A: $B_1 = B_2$, $\mathrm{div}(\mathrm{df}) = (n-1)\,[P] + 2\,[B_1] - (n+1)\,[\mathcal{O}]$
- Fall B: $B_1 \neq B_2$, $\mathrm{div}(\mathrm{df}) = (n-1)\,[P] + [B_1] + [B_2] - (n+1)\,[\mathcal{O}]$

Verzweigungspunkt	$f(P) = 0$
Hurwitzdatum A	(n)
Begründung	n-fache NST, alle Blätter berühren sich
Hurwitzdatum B ($n > 3$)	(n)
Begründung	n-fache NST, alle Blätter berühren sich

Hurwitzdatum der Überlagerung $f : E \to \overline{\mathbb{C}}$

- Fall A: $B_1 = B_2$, $\mathrm{div}(\mathrm{df}) = (n-1)\,[P] + 2\,[B_1] - (n+1)\,[\mathcal{O}]$
- Fall B: $B_1 \neq B_2$, $\mathrm{div}(\mathrm{df}) = (n-1)\,[P] + [B_1] + [B_2] - (n+1)\,[\mathcal{O}]$

Verzweigungspunkt	$f(\mathcal{O}) = \infty$
Hurwitzdatum A	(n)
Begründung	n-facher Pol, alle Blätter berühren sich.
Hurwitzdatum B ($n > 3$)	(n)
Begründung	n-facher Pol, alle Blätter berühren sich.

Hurwitzdatum der Überlagerung $f\colon E \to \overline{\mathbb{C}}$

- Fall A: $B_1 = B_2$, $\mathrm{div}(\mathrm{df}) = (n-1)\,[P] + 2\,[B_1] - (n+1)\,[\mathcal{O}]$
- Fall B: $B_1 \neq B_2$, $\mathrm{div}(\mathrm{df}) = (n-1)\,[P] + [B_1] + [B_2] - (n+1)\,[\mathcal{O}]$

Verzweigungspunkt	$f(B_1) = f(B_2)$
Hurwitzdatum A	$(3, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-3})$
Begründung	3-Zyklus und $n-3$ Fixpunkte, 3 Blätter berühren sich
Hurwitzdatum B ($n > 3$)	$(2, 2, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-4})$
Begründung	Es gibt eine Doppeltransposition $(a, b)(c, d)$ mit $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$ und $n-4$ Fixpunkte.

Der Satz von Riemann-Hurwitz

Warum gibt es nur die Zykellängen $(3,\underbrace{1,\ldots,1}_{n-3})$ und $(2,2,\underbrace{1,\ldots,1}_{n-4})$?

Antwort liefert der **Satz von Riemann-Hurwitz**: Für die Gesamtverzweigungsordnung $b(f)$ der Überlagerung $f\colon E \to \overline{\mathbb{C}}$ gilt

$$g = \frac{b(f)}{2} + n\,(g' - 1) + 1.$$

- n ist der Grad der Überlagerung
- g ist das Geschlecht der elliptischen Kurve E, also $g = 1$
- g' ist das Geschlecht von $\overline{\mathbb{C}}$, also $g' = 0$

$\Rightarrow$ f besitzt Gesamtverzweigungsordnung $b(f) = 2n$.

Der Satz von Riemann-Hurwitz (II)

Das Hurwitzdatum $(n_1^{(3)}, \ldots n_{k_3}^{(3)})$ des dritten Verzweigungspunktes muss zwei Bedingungen erfüllen:

(1) Die Verzweigungsordnung lautet

$$b(f) - (n-1) - (n-1) = (n - (n-2)),$$

somit existieren $k_3 = n - 2$ Zyklen, wobei Fixpunkte als Zyklen der Länge 1 gezählt werden.

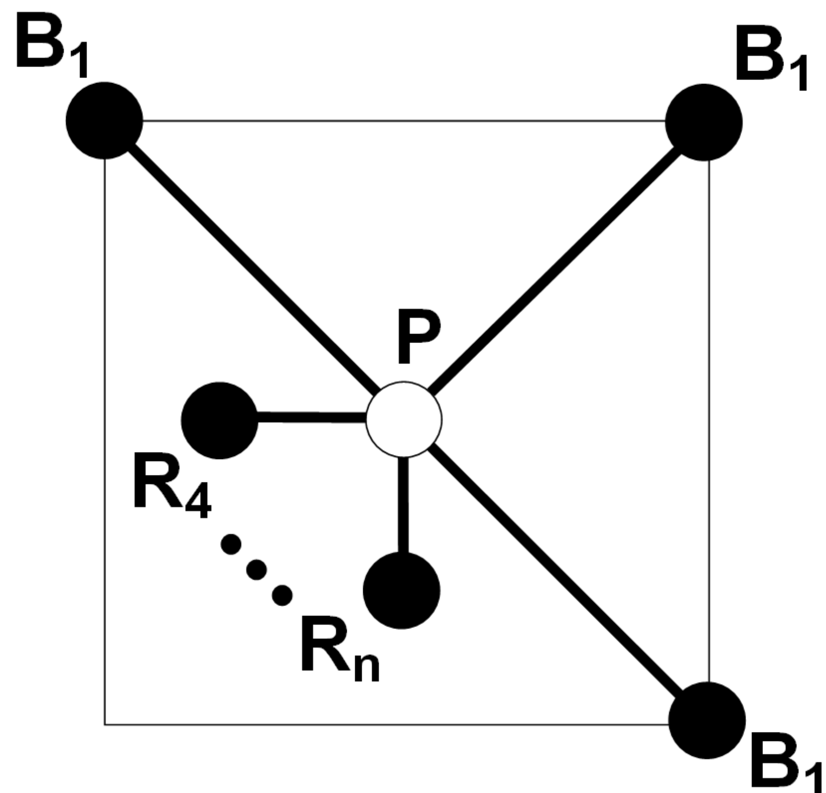
(2) Die Summe $n_1^{(3)} + \cdots + n_{k_3}^{(3)}$ der Zykellängen muss dem Grad n der Überlagerung entsprechen.

$\Rightarrow$ Es gibt nur zwei mögliche Hurwitz-Verzweigungen für den dritten Verzweigungspunkt:

- Fall A: $(3, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-3})$, Fall B: $(2, 2, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-4})$

Übersicht über alle Verzweigungspunkte und ihre Urbilder (Fall A)

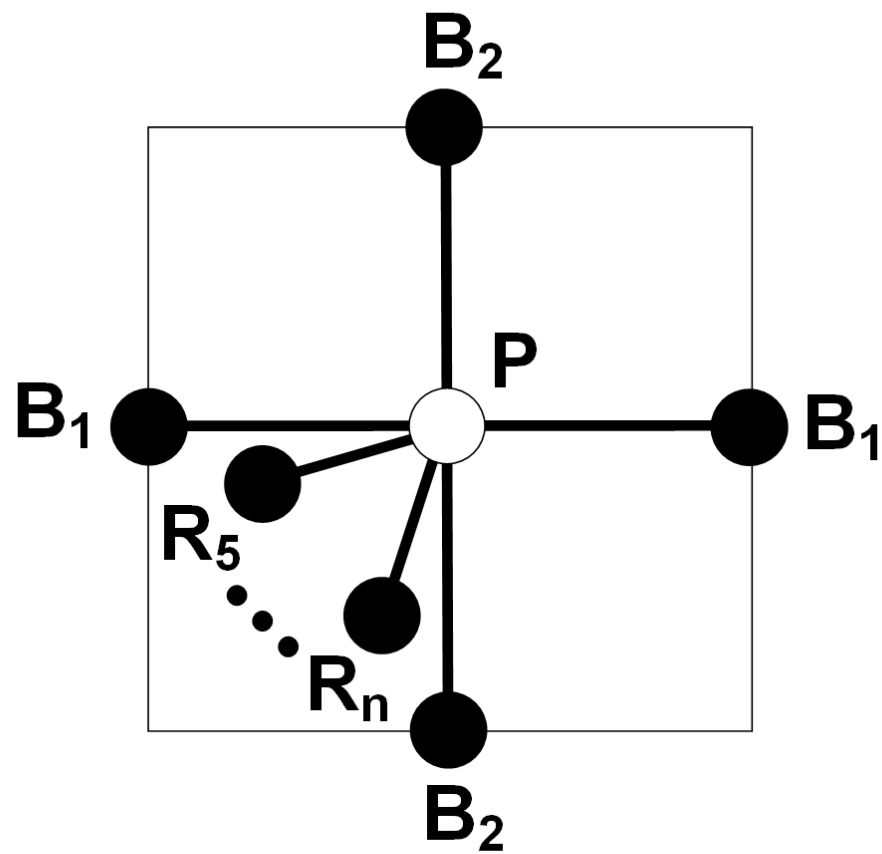
$$
\boxed{
\begin{array}{llll}
f: & P & \underset{n}{\longmapsto} & 0 \\
 & \mathcal{O} & \underset{n}{\longmapsto} & \infty \\
 & B_1 = B_2 & \underset{3}{\longmapsto} & f(B_1) \\
 & R_4 & \underset{1}{\longmapsto} & f(B_1) \\
 & \ldots & & \ldots \\
 & R_n & \underset{1}{\longmapsto} & f(B_1)
\end{array}
}
$$



$B_1, R_4, \ldots, R_n$ sind paarweise voneinander verschieden !

Übersicht über alle Verzweigungspunkte und ihre Urbilder (Fall B)

$$
\begin{array}{llcl}
f: & P & \underset{n}{\longmapsto} & 0 \\
 & \mathcal{O} & \underset{n}{\longmapsto} & \infty \\
 & B_1 & \underset{2}{\longmapsto} & f(B_1) \\
 & B_2 & \underset{2}{\longmapsto} & f(B_1) \\
 & R_5 & \underset{1}{\longmapsto} & f(B_1) \\
 & \dots & & \dots \\
 & R_n & \underset{1}{\longmapsto} & f(B_1)
\end{array}
$$



$B_1, B_2, R_5, \dots, R_n$ sind paarweise voneinander verschieden !

Umformulierung der Fragestellung

Im Fall A sind die folgenden Aussagen für jedes $n \geq 3$ äquivalent:

(1) Es gibt eine elliptische Kurve E mit n-Torsionspunkt P, dessen Weil-Funktion eine Überlagerung $f\colon E \to \overline{\mathbb{C}}$ ist, die über maximal drei Punkten verzweigt ist.

(2) Die Dreiecksgruppe
$G_n = \triangle(3, n, n) = \langle x, y, z \,|\, x^3 = y^n = z^n = xyz = 1 \rangle$ besitzt eine Untergruppe U_n vom Index n, so dass bei der Operation von G_n auf den Rechtsnebenklassen von U_n bezüglich G_n der Erzeuger x eine Bahn der Länge 3 und die Erzeuger y und z jeweils eine Bahn der Länge n besitzen.

(3) Es gibt Permutationen $\pi_x, \pi_y, \pi_z \in S_n$ mit Produkt $\pi_x \pi_y \pi_z = \mathrm{id}$, π_x ist ein 3-Zykel und $\mathrm{ord}(\pi_y) = \mathrm{ord}(\pi_z) = n$, so dass deren Erzeugnis $M = \langle \pi_x, \pi_y, \pi_z \rangle$ eine transitive Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_n ist.

Umformulierung der Fragestellung (II)

Fall B gelten die entsprechenden äquivalenten Aussagen für jedes $n \geq 4$:

(1) Die Weil-Funktion $f\colon E \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ ist eine Belyi-Funktion.

(2) Die Dreiecksgruppe $\triangle(2, n, n)$ besitzt Untergruppe U_n vom Index n, auf denen x eine Bahn der Länge 2 und y und z Bahnen der Länge n besitzen.

(3) $M = \langle \pi_x, \pi_y, \pi_z \rangle \leq S_n$ ist transitiv mit Produkt $\pi_x \pi_y \pi_z = \mathrm{id}$, dabei ist π_x eine Doppel-Transposition und es gilt $\mathrm{ord}(\pi_y) = \mathrm{ord}(\pi_z) = n$.

Existenztheorem - Gibt es für jedes n Beispiele ?

Theorem 2 (Fall A) *Für $n \geq 3$ hat die Dreiecksgruppe $G_n = \triangle(3, n, n) = \langle x, y, z \,|\, x^3 = y^n = z^n = xyz = 1\rangle$ stets eine Untergruppe U_n vom Index n, so dass bei der Operation von G_n auf den Rechtsnebenklassen von U_n bezüglich G_n der Erzeuger x eine Bahn der Länge 3 und die Erzeuger y und z jeweils eine Bahn der Länge n besitzen.*

Beweis. Konstruktion einer Untergruppe $U_n < \triangle(3, n, n)$:

- $G_n = \langle x, y, z\rangle$ operiert auf $T = \{1, \ldots, n\}$ durch:

$$x \mapsto (1\ 2\ 3)$$

$$y \mapsto (1\ \ldots\ n)$$

$$z = y^{-1}x^{-1} \mapsto (n\ n-1\ \ldots\ 4\ 2\ 3\ 1) \text{ bzw. } (2\ 3\ 1) \text{ für } n = 3$$

- Wegen des n-Zykels gibt es nur eine Bahn $\Rightarrow$ Operation ist transitiv.

- Wähle U_n als Stabilisator $\{g \in G_n \,|\, \alpha^g = \alpha\}$ eines beliebigen Punktes $\alpha \in T$.

- Index $[G_n\colon \{g \in G_n \,|\, \alpha^g = \alpha\}] = |\alpha^{G_n}| = n$, da die Operation transitiv ist.

Theorem 3 (Fall B) *Für $n \geq 4$ operieren die Erzeuger von $G_n = \triangle(2, n, n)$ auf den RNK einer Index-n-Untergruppe mit Bahnen der Längen 2, n, n.*

Beweis. Wie im Fall A. Die Erzeuger operieren wie folgt:

$$x \mapsto (1\ 3)(2\ 4)$$

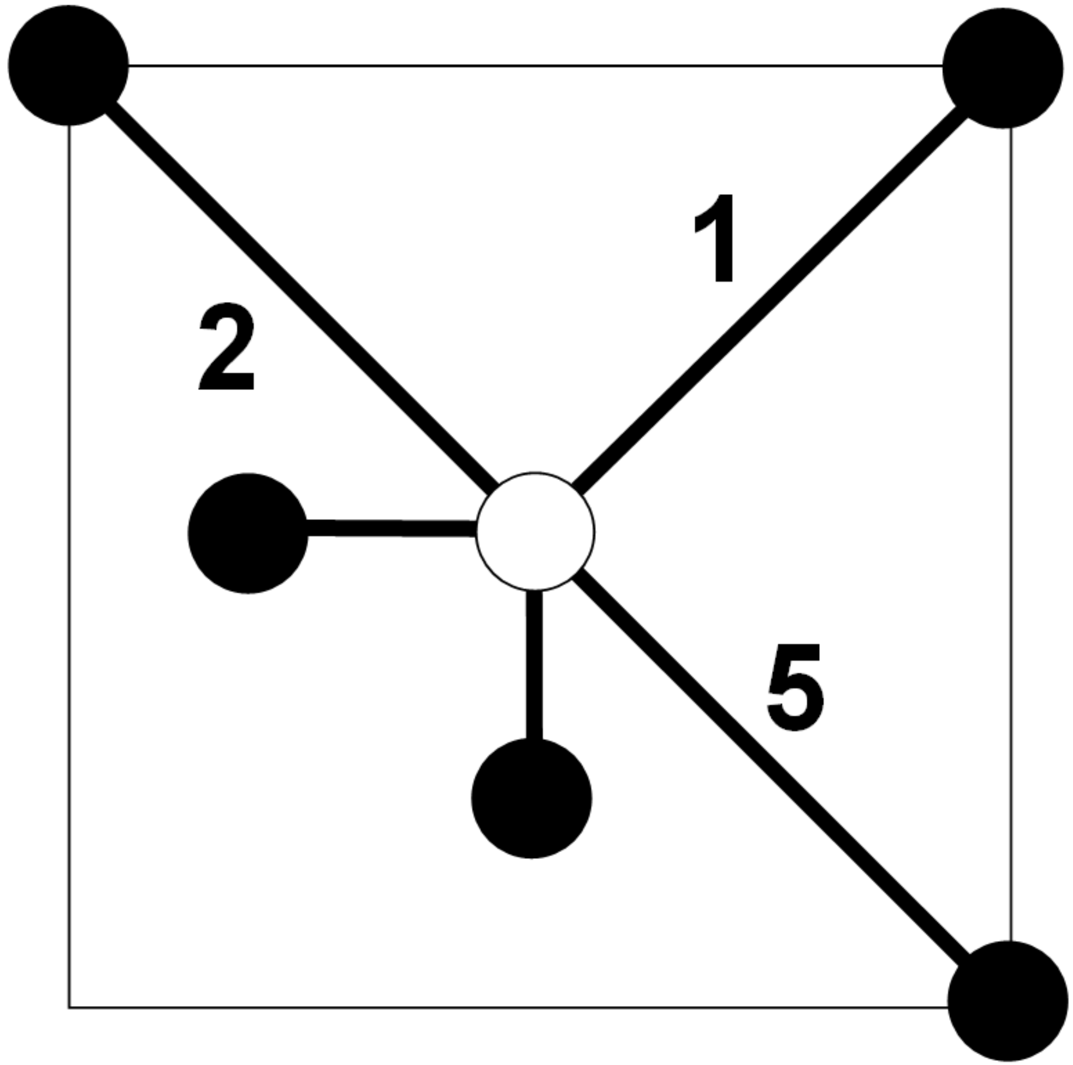
$$y \mapsto (1\ \ldots\ n)$$

$$z = y^{-1}x^{-1} \mapsto (n\ n-1\ \ldots\ 5\ 2\ 3\ 4\ 1) \text{ bzw. } (2\ 3\ 4\ 1) \text{ für } n = 4$$

Teil 4: Beispiele von Galois-konjugierten Belyi-Graphen

- Bilder der Belyi-Graphen für $n = 5$ (Fall A)
- Bilder der Belyi-Graphen für $n = 7$ (Fall A und Fall B)

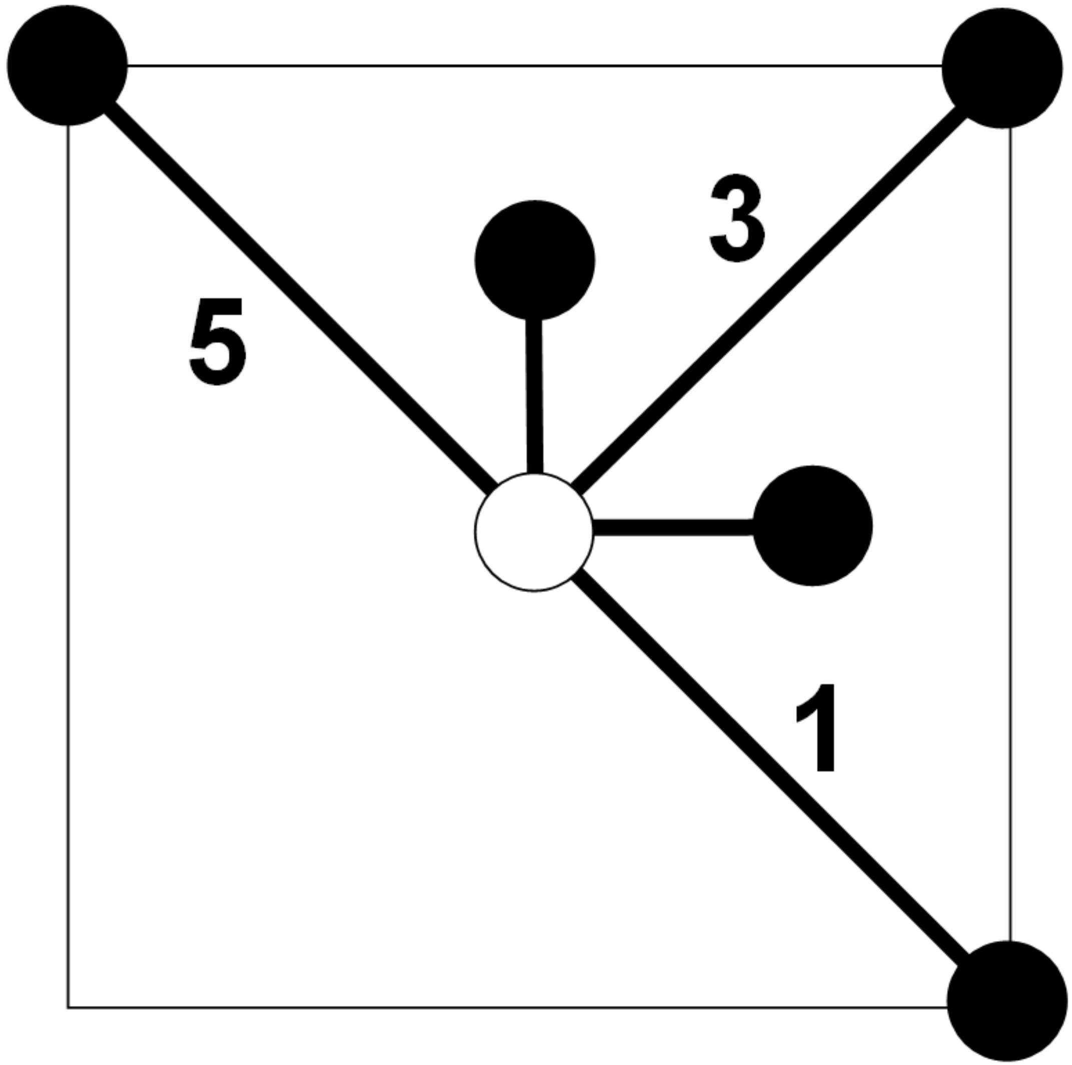
Fall A, $n = 5$**,** $\triangle(3,5,5)$**,** $c_1 = \frac{1}{3}$



$$E_c\colon\, y^2 + (1+c)\,xy + c\,y = x^3 + c\,x^2$$

$$f_c(x,y) = -x^2 + xy + y$$

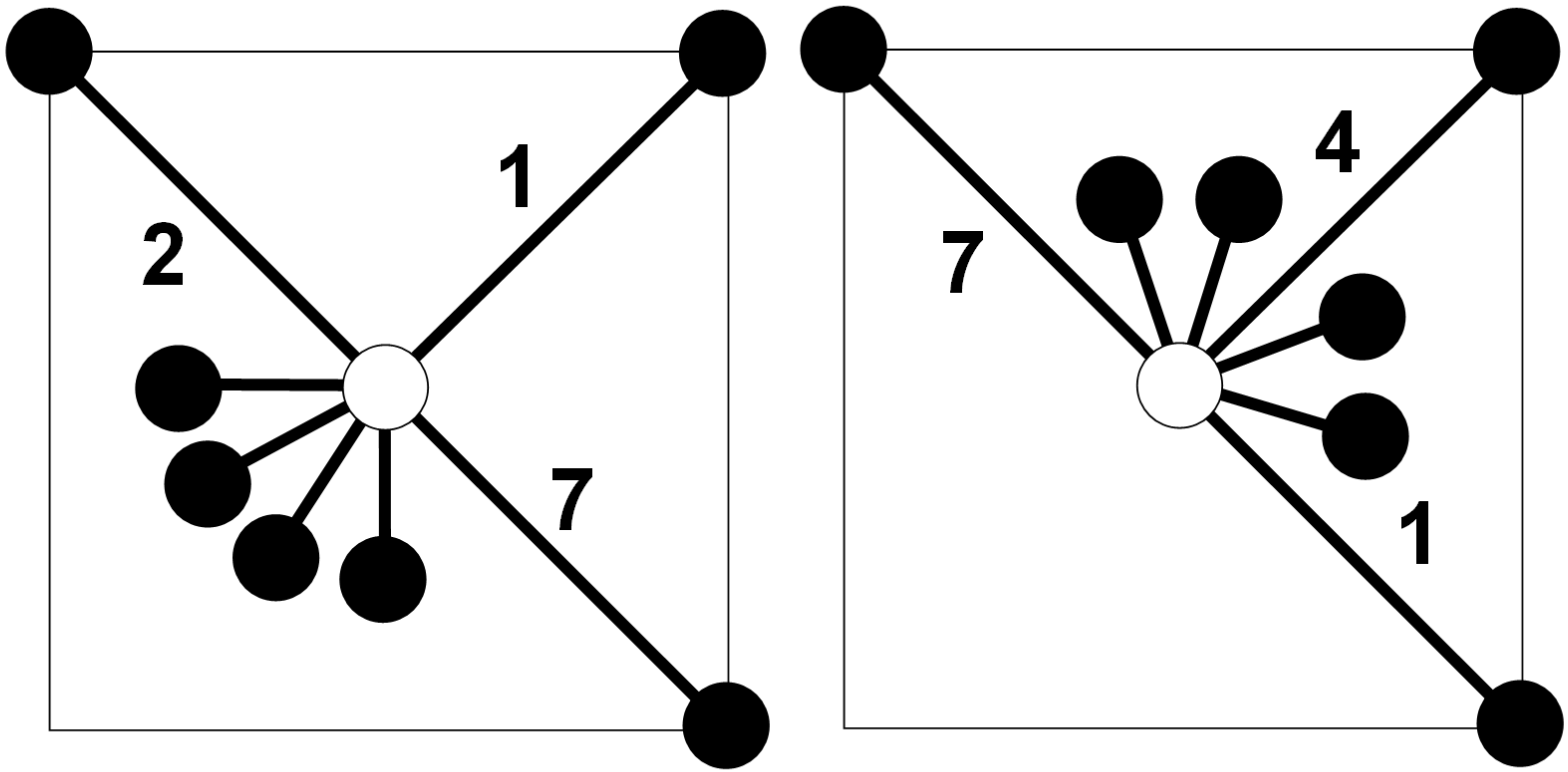
Fall A, $n = 5$, $\triangle(3,5,5)$, $c_2 = -\frac{4}{3}$



$$E_c\colon\, y^2 + (1+c)\,xy + c\,y = x^3 + c\,x^2$$

$$f_c(x,y) = -x^2 + xy + y$$

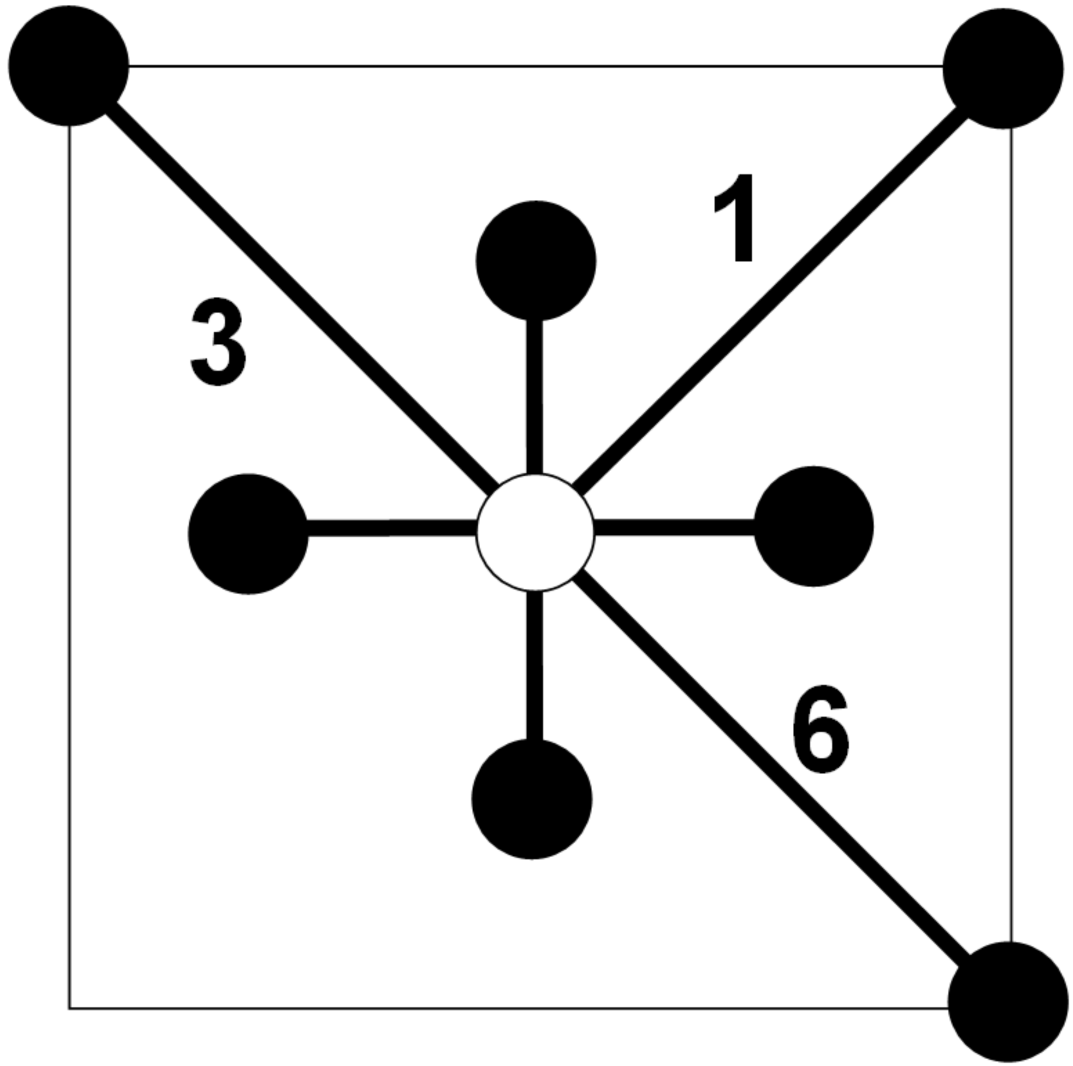
Fall A, $n = 7$**,** $\triangle(3,7,7)$**,** $c_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{21}}{6} - \frac{3}{2}$



$$E_c\colon\, y^2 + (1 - c - c^2)\, xy + c^2(c+1)\, y = x^3 + c^2(c+1)\, x^2$$

$$f_c(x,y) = (c-1)\, x^3 + x^2 y - c^2\, x^2 + (1-2c)\, xy + c^2\, y$$

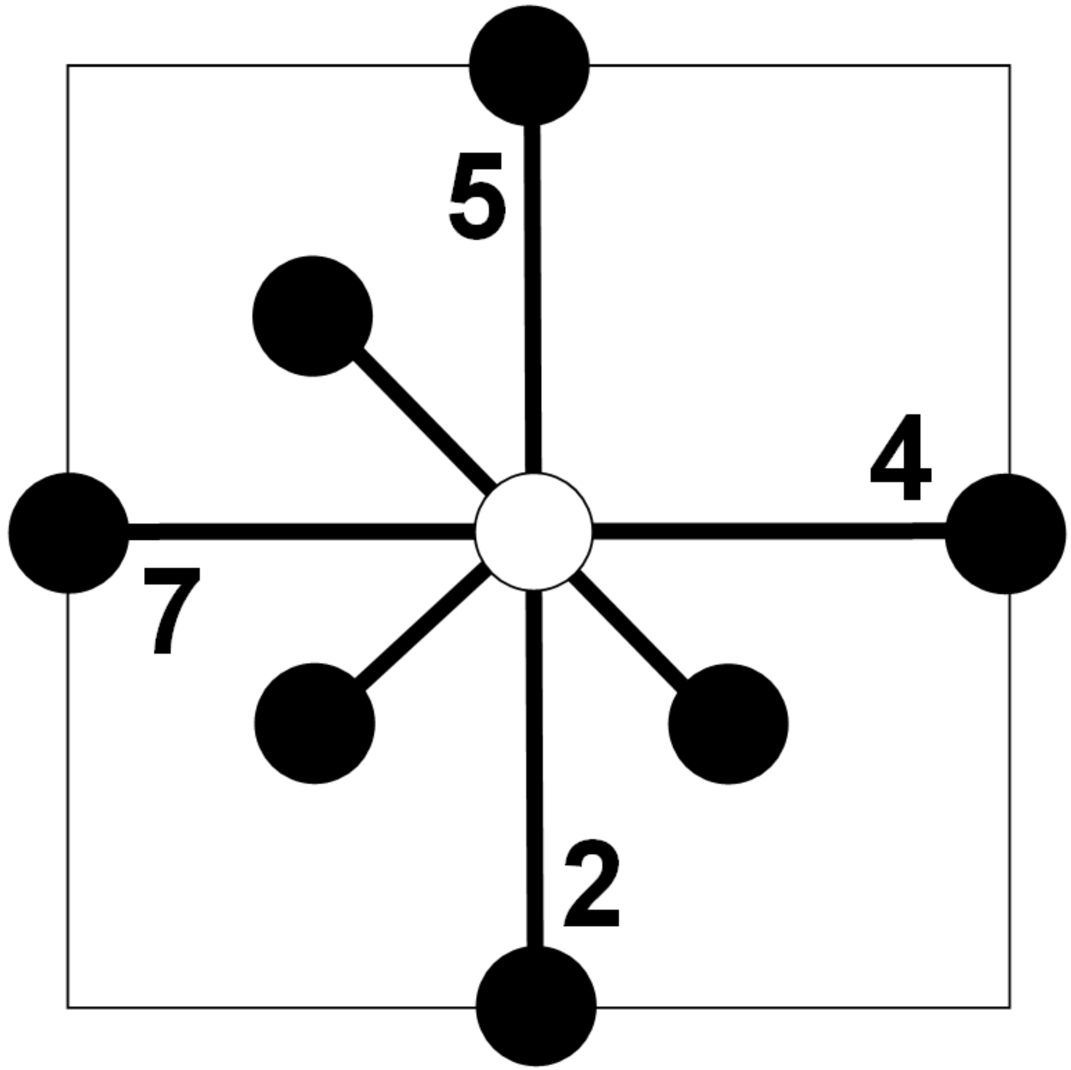
Fall A, $n = 7$, $\triangle(3,7,7)$, $c_3 = \frac{\sqrt[3]{98}}{6} - \frac{1}{3}$



$$E_c\colon y^2 + (1 - c - c^2)\, xy + c^2(c+1)\, y = x^3 + c^2(c+1)\, x^2$$

$$f_c(x,y) = (c-1)\, x^3 + x^2 y - c^2\, x^2 + (1-2c)\, xy + c^2\, y$$

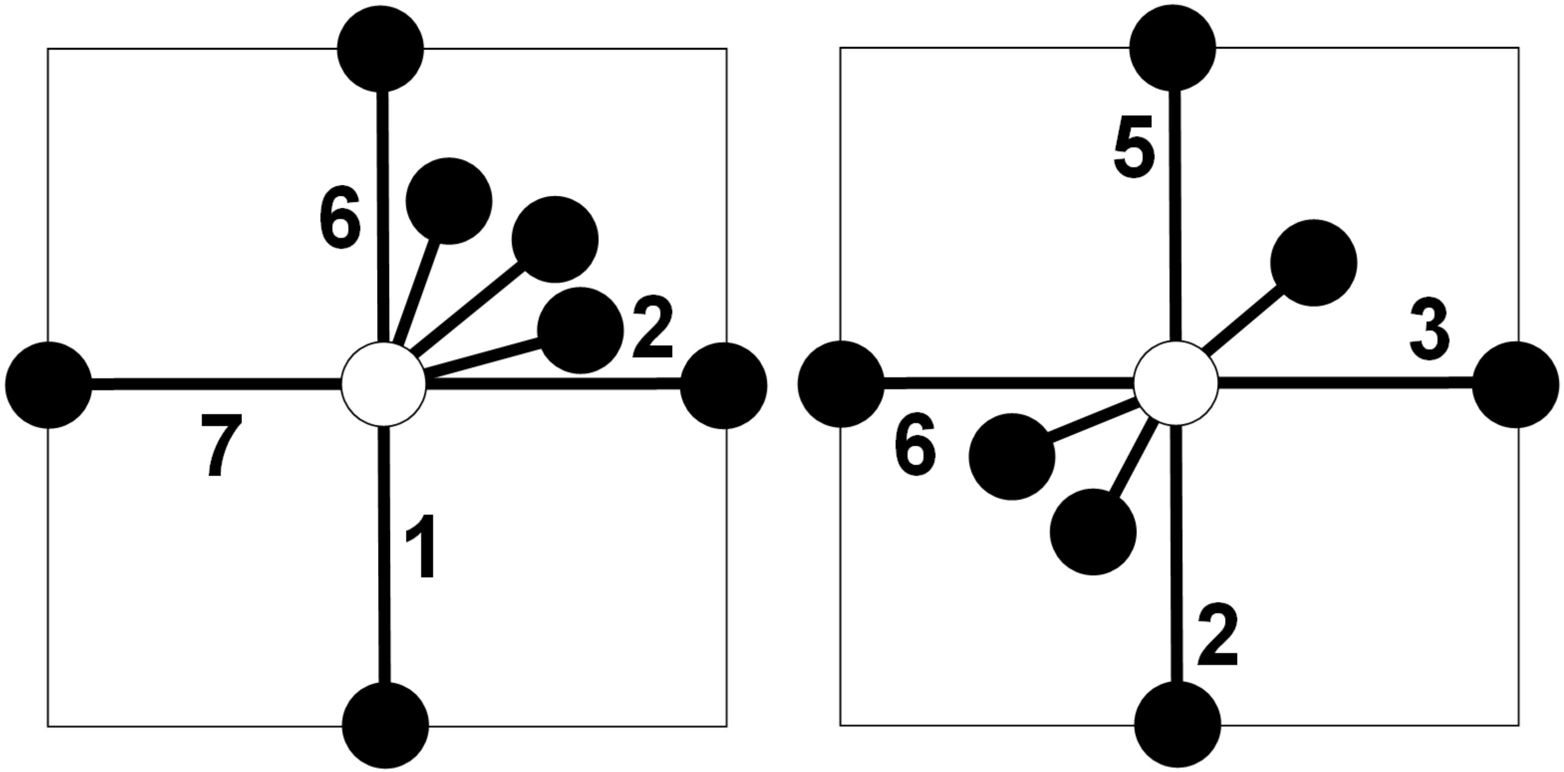
Fall B, $n = 7$**,** $\triangle(2,7,7)$**,** $c_6 = -5$**,** $E =$**490-K2**



$$E_c\colon y^2 + (1 - c - c^2)\, xy + c^2(c+1)\, y = x^3 + c^2(c+1)\, x^2$$

$$f_c(x,y) = (c-1)\, x^3 + x^2 y - c^2\, x^2 + (1-2c)\, xy + c^2\, y$$

Fall B, $n = 7$**,** $\triangle(2,7,7)$**,** $c_{7,8} = -\frac{13}{4} \pm \frac{3}{4}\sqrt{21}$



$$E_c\colon\, y^2 + (1 - c - c^2)\,xy + c^2(c+1)\,y = x^3 + c^2(c+1)\,x^2$$

$$f_c(x,y) = (c-1)\,x^3 + x^2y - c^2\,x^2 + (1-2c)\,xy + c^2\,y$$

Literatur

Das Kapitel über elliptische Funktionen wurde maßgeblich dem nachfolgenden Buch entnommen:

[KK98] M. Koecher, A. Krieg, *Elliptische Funktionen und Modulformen*, Springer Verlag, Berlin, 1998

Der Abschnitt über elliptische Kurven mit n-Torsionspunkt benutzt Anregungen aus:

[Sil01] A. Silverberg, *Open Questions in Arithmetic Algebraic Geometry*, in *Arithmetic Algebraic Geometry*, B. Conrad and K. Rubins, eds., American Math. Soc. IAS/Park City, Vol. 9 (2001)

Der Satz von Riemann-Hurwitz wurde in der Formulierung von 17.14 dem folgenden Buch entnommen:

[For77] O. Forster, *Riemannsche Flächen*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1977