Eine rationale und eine elliptische Kurve für A_5

—

Bestimmung von Belyĭ-Funktionen

—

$$\triangle(3,3,5) \to A_5$$
$$\triangle(3,5,5) \to A_5$$

Patrick Reichert

25. März 2016

Zusammenfassung

Diese Abhandlung bestimmt für zwei Beispiele die Gleichungen von Riemannschen Flächen X vom Geschlecht 0 und 1 und die zugehörigen Belyĭ-Funktionen $X \to \mathbb{P}^1$.

Mathematical Subject Classification 2010: 11G32 (primary); 14H45, 30F10 (secondary)

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Dreiecksgruppen $\Delta = \triangle(m_1, m_2, m_3)$ mit $\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} < 1$ können in die $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ eingebettet werden und operieren damit als Fuchssche Gruppen diskontinuierlich auf der komplexen oberen Halbebene $\mathbb{H} \overset{\text{def}}{=} \{x + y\,i \in \mathbb{C} \,|\, x, y \in \mathbb{R}, y > 0\}$. Der verallgemeinerte Riemannsche Abbildungssatz sagt aus, dass sich jede zusammenhängende hyperbolische Riemannsche Fläche durch einen Quotientenraum der Form $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ beschreiben lässt, wobei $\Gamma \leq \Delta$ eine Untergruppe einer geeigneten Dreiecksgruppe Δ mit endlichem Index $[\Delta : \Gamma]$ ist.

Der Satz von Belyĭ sagt aus, dass sich eine Riemannsche Fläche X genau dann über dem Körper $\overline{\mathbb{Q}}$ der algebraischen Zahlen definieren lässt, wenn es eine nicht-konstante meromorphe Überlagerung $\beta\colon X \to \mathbb{P}^1 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ gibt, die nur über maximal drei Punkten verzweigt ist. Eine solche Abbildung β nennt man Belyĭ-Funktion. Auch die Belyĭ-Funktion kann so gewählt werden, dass sie über $\overline{\mathbb{Q}}$ definiert ist [Bel79], [Wol97], [SIS97], [LZ04], Seite 79.

2 Transitive Bilder von Dreiecksgruppen

Definition 2.1 (Situationsbeschreibung) *Sei $\varphi\colon \triangle(m_1, m_2, m_3) \to M$ ein Epimorphismus, der die hyperbolische Dreiecksgruppe $\Delta = \triangle(m_1, m_2, m_3) = \langle x_1, x_2, x_3 \mid x_1^{m_1} = x_2^{m_2} = x_3^{m_3} = x_1x_2x_3 = 1\rangle$ auf eine transitive Permutationsgruppe $M \leq S_n$ abbildet. Sei $\Delta_{[1]}$ das Urbild des Punktstabilisators der 1:*

$$\Delta_{[1]} \overset{def}{:=} \varphi^{-1}(\mathrm{Stab}_M(1)) = \left\{\delta \in \Delta \mid 1^{\varphi(\delta)} = 1\right\}$$

mit endlichem Index $d = \left[\Delta : \Delta_{[1]}\right]$. Die symmetrische Gruppe S_n operiere dabei wie üblich auf der Menge $\{1, \ldots, n\}$. Insgesamt werden die folgenden Untergruppenstrukturen betrachtet:

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} N = \ker\varphi & \leq & \Delta_{[1]} = \varphi^{-1}(\mathrm{Stab}_M(1)) & \underset{(d)}{<} & \Delta = \triangle(m_1, m_2, m_3) \\ \downarrow\varphi & & \downarrow\varphi & & \downarrow\varphi \\ \{\mathrm{Id}\} & \leq & \varphi(\Delta_{[1]}) = \mathrm{Stab}_M(1) & \underset{(d)}{<} & M \end{array}}$$

Untersucht werden die folgenden Abbildungen zwischen kompakten Riemannschen Flächen:

- *Belyĭ-Funktion $\beta\colon \Delta_{[1]}\backslash\mathbb{H} \to \Delta\backslash\mathbb{H} \cong \mathbb{P}^1$ mit den Verzweigungsdaten $\sigma_0 = \varphi(x_1)$, $\sigma_1 = \varphi(x_2)$, $\sigma_\infty = \varphi(x_3)$*
- *Normalisierung $\overline{\beta}$ der Belyĭ-Funktion: $\ker\varphi\backslash\mathbb{H} \to \Delta\backslash\mathbb{H} \cong \mathbb{P}^1$*

3 Geschlechtsbestimmung mit dem Riemann-Hurwitz-Theorem

Theorem 3.1 (Riemann-Hurwitz-Gleichung)

(a) ([FK92], Kapitel I.2.7) Sei $f\colon X \to Y$ eine nicht-konstante holomorphe Abbildung zwischen der kompakten Riemannschen Fläche X mit Geschlecht g und der kompakten Riemannschen Fläche Y mit Geschlecht γ. Sei d der Grad von f, d.h. die Urbildmenge $f^{-1}(Q)$ habe Kardinalität d für fast alle $Q \in Y$. Die Gesamtverzweigungsordnung von f sei definiert durch

$$B_f \overset{def}{:=} \sum_{P \in X} b_f(P),$$

dabei bezeichne $b_f(P)$ die Verzweigungsordnung von f im Punkt $P \in X$, d.h. der Funktionswert $f(P) \in Y$ habe $(b_f(P) + 1)$ Urbilder im Punkt P. Dann gilt

$$2g - 2 = (2\gamma - 2)d + B_f.$$

(b) ([FK92], Kapitel V.1.3 und [BCC03], Kapitel 2) Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche mit Geschlecht g. Sei $G \leq \mathrm{Aut}\, X$ eine Untergruppe der Automorphismengruppe von X, die sich als Faktorgruppe $G = \Gamma/N$ Fuchsscher Gruppen

$$\begin{aligned}\Gamma &= (\gamma; m_1, \ldots, m_r) \\ &= \langle a_1, b_1, \ldots, a_\gamma, b_\gamma, x_1, \ldots, x_r \mid x_1^{m_1} = \cdots = x_r^{m_r} = x_1 \cdots x_r [a_1, b_1] \cdots [a_\gamma, b_\gamma] = 1\rangle\end{aligned}$$

und

$$N \lhd \Gamma$$

schreiben lässt. Dann gilt

$$2g - 2 = |G| \cdot (2\gamma - 2) + |G| \cdot \sum_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{m_i}\right).$$

(c) ([KMSV14], Formel 1.11) Sei $\Delta = \triangle(m_1, m_2, m_3) = \langle x_1, x_2, x_3 \mid x_1^{m_1} = x_2^{m_2} = x_3^{m_3} = x_1x_2x_3 = 1\rangle$ eine hyperbolische Dreiecksgruppe, d.h. $\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} < 1$. Sei $\Gamma \leq \Delta$ eine Untergruppe mit endlichem Index $d = [\Delta : \Gamma]$, für die die Abbildung $\beta\colon X = \Gamma\backslash\mathbb{H} \to \Delta\backslash\mathbb{H} \cong \mathbb{P}^1$,

$\beta : \Gamma h \mapsto \Delta h$ eine Belyĭ-Funktion ist, d.h. unverzweigt außerhalb von $\{0, 1, \infty\}$. Dann gilt für das Geschlecht g der Riemannschen Fläche X:

$$2g - 2 = (0 - 2)d + (e(\sigma_0) + e(\sigma_1) + e(\sigma_\infty)).$$

Dabei seien σ_0, σ_1, σ_∞ Permutationen in der symmetrischen Gruppe S_d, die die verzweigte Überlagerung β beschreiben. Die Zyklen von σ_0, σ_1, σ_∞ korrespondieren mit den Punkten von X über 0, 1, ∞ (in dieser Reihenfolge). Die Anzahl der disjunkten Zyklen der Permutationen σ_0, σ_1, σ_∞ sei die Anzahl der paarweise voneinander verschiedenen Punkte in den Fasern über 0, 1, ∞. Die Länge der disjunkten Zykel in σ_0, σ_1, σ_∞ gibt dann die Verzweigungsindizes dieser Punkte über 0, 1, ∞ an.

Der Exzess $e(\tau)$ eines Zykels $\tau \in S_d$ sei definiert als seine Länge minus 1. Der Exzess $e(\sigma)$ einer Permutation $\sigma \in S_d$ sei definiert als die Summe der Exzesse ihrer disjunkten Zyklen.

Beispielsweise besitzt $\sigma_0 = (1\,2\,3)(4\,5)(6\,7\,8\,9)(10) \in S_{10}$ vier disjunkte Zyklen und beschreibt damit 4 Punkte über der 0 mit den Verzweigungsindizes 3, 2, 4, 1 bzw. Verzweigungsordnungen 2, 1, 3, 0. Für den Exzess gilt dann $e((1\,2\,3)(4\,5)(6\,7\,8\,9)(10)) = (3-1)+(2-1)+(4-1)+(1-1) = 6$.

Beweisidee von 3.1(b): Für jeden Punkt $P \in X$ ist der Stabilisator

$$G_P \overset{\text{def}}{=} \{g \in G \mid g(P) = P\}$$

eine zyklische Untergruppe von G gemäß [FK92], Kapitel III.7.7. Man wendet 3.1(a) auf die natürliche holomorphe Projektion $\pi\colon X \to X/G$ eines Punktes auf seinen Orbit an, siehe [FK92], Kapitel III.7.8. Für alle Punkte $P \in X$ gilt für die Verzweigungsordnung

$$b_\pi(P) = \operatorname{ord} G_P - 1.$$

Die Projektion π besitzt den Grad $|G|$ und ist nur in den Fixpunkten von G verzweigt. Sei $\{P_1, \dots, P_r\}$ eine maximale Menge von nicht-äquivalenten (d.h. $P_i \neq g(P_j)$ für alle $g \in G$ und alle $i \neq j$) Punkten, die von den Automorphismen aus $G \setminus \{\mathrm{Id}\}$ festgehalten werden. Setzt man $m_i = \operatorname{ord} G_{P_i}$ für alle $i \in \{1, \dots, r\}$, dann gibt es für jedes $i \in \{1, \dots, r\}$ genau $\frac{|G|}{m_i}$ paarweise verschiedene Punkte auf X, die unter der Operation von G äquivalent zu P_i sind, und jeder dieser Punkte besitzt als Stabilisator eine zyklische Untergruppe der Ordnung m_i. Als Gesamtverzweigungsordnung von π erhält man also

$$B_\pi = \sum_{i=1}^{r} \frac{|G|}{m_i}(m_i - 1) = |G| \cdot \sum_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{m_i}\right).$$

Da X/G eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht γ ist, folgt mit 3.1(a):

$$2g - 2 = |G| \cdot (2\gamma - 2) + |G| \cdot \sum_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{m_i}\right). \quad \square$$

Beweisidee von 3.1(c): Die Geschlechtsformel folgt direkt aus der Anwendung von 3.1(a) auf die Belyĭ-Funktion β:

$$2g - 2 = (2\gamma - 2)\deg(\beta) + B_\beta$$

Dabei ist γ das Geschlecht von $\mathbb{P}^1$, also $\gamma = 0$. Der Grad $\deg(\beta)$ der Belyĭ-Funktion als Quotientenabbildung entspricht dem Index d der Untergruppe Γ in Δ. Die Gesamtverzweigungsordnung B_β der Belyĭ-Funktion β ist gerade die Summe $e(\sigma_0) + e(\sigma_1) + e(\sigma_\infty)$ der Verzweigungsordnungen aller Punkte über 0, 1 und ∞. $\square$

4 Eine rationale Belyĭ-Kurve

4.1 Geschlechtsbestimmung

Theorem 4.1 ([KMSV14], Beispiel 5.7 und [Con15], T5.18) *Sei $\varphi_V\colon \triangle(3,3,5) \to A_5$ der Epimorphismus, der die Dreiecksgruppe*

$$\triangle(3,3,5) = \langle x_1, x_2, x_3 \mid x_1^3 = x_2^3 = x_3^5 = x_1 x_2 x_3 = 1\rangle$$

auf die alternierende Gruppe A_5 abbildet gemäß

$$\varphi_V(x_1) = (1\,3\,2),\ \varphi_V(x_2) = (3\,5\,4),\ \varphi_V(x_3) = (1\,2\,3\,4\,5).$$

Der Punktstabilisator $\triangle(3,3,5)_{[1]} = \varphi_V^{-1}(\mathrm{Stab}_{A_5}(1))$ sei definiert gemäß Definition 2.1. Dann gilt:

(a) Der Index des Punktstabilisators ist $[\triangle(3,3,5) : \triangle(3,3,5)_{[1]}] = 5$.

(b) Der Quotient des Punktstabilisators besitzt das Geschlecht $g(\triangle(3,3,5)_{[1]}\backslash\mathbb{H}) = 0$.

(c) Der Quotient des Normalteilers besitzt das Geschlecht $g(\ker\varphi_V\backslash\mathbb{H}) = 5$.

(d) Der Normalteiler $\ker\varphi_V$ trägt Marston Conders Bezeichnung T5.18 und besitzt die Präsentation

$$\langle x_1, x_2, x_2 \mid x_1^3 = x_2^3 = x_1x_2x_3 = x_1^2x_3x_2^2x_1x_3^2 = x_3^2x_2^2x_1^2x_3^2 = 1\rangle.$$

Beweis.

(a) Der Punktstabilisator besitzt den Index

$$d = [M : \mathrm{Stab}_M(1)] = [A_5 : \{m \in A_5 \mid 1^m = 1\}] = [A_5 : A_4] = 5.$$

(b) Für das Geschlecht $g_1 = g(\triangle(3,3,5)_{[1]}\backslash\mathbb{H})$ folgt aus Theorem 3.1(c):

$$\begin{aligned} &2g_1 - 2 = (0-2)\cdot 5 + (2+2+4) \\ &\Leftrightarrow g_1 = 0 \end{aligned}$$

(c) Für das Geschlecht $g_2 = g(\ker\varphi_V\backslash\mathbb{H})$ folgt aus Theorem 3.1(b):

$$\begin{aligned} &2g_2 - 2 = |A_5|\cdot(2\cdot 0 - 2) + |A_5|\cdot\left(1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{5}\right) \\ &\Leftrightarrow g_2 = 5 \end{aligned}$$

(d) Gemäß Conders Liste [Con15] gibt es bis auf Isomorphie, Dualität/Trialität und Spiegelung für die Dreiecksgruppe $\triangle(3,3,5)$ genau einen Normalteiler mit Faktorgruppe A_5 und dieser besitzt die Bezeichnung T5.18. □

4.2 Gleichung für $\triangle(3,3,5) \to A_5$

Definition 4.2 (Direkte Methode für Geschlecht-0-Kurven, [SV14], Beispiel 2.1) *Sei $\beta\colon X \to \mathbb{P}^1$ eine Belyĭ-Funktion, die nur über $\{0,1,\infty\}$ verzweigt ist. Dabei sei X eine kompakte Riemannsche Fläche mit Geschlecht $g(X) = 0$. Nach dem Satz von Belyĭ ist β somit eine rationale Funktion $\beta \in K(x)$, wobei $K \subset \overline{\mathbb{Q}}$ ein Zahlkörper ist, also eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}$. Die **direkte Methode** verwendet die zwei Ansatzgleichungen*

$$\begin{aligned} \beta(x) &= \frac{\beta_0(x)}{\beta_\infty(x)}, \\ \beta(x) - 1 &= \frac{\beta_1(x)}{\beta_\infty(x)} \end{aligned}$$

mit Polynomen $\beta_0, \beta_1, \beta_\infty \in K[x]$. Dabei gilt:

- *das Polynom β_0 beschreibt die Nullstellen von β inklusive Vielfachheit,*
- *das Polynom β_1 beschreibt das Verzweigungsverhalten von β über $x = 1$,*
- *das Polynom β_∞ beschreibt die Polstellen von β inklusive Vielfachheit.*

Verwendet werden die Ansatzgleichungen in der zusammengefassten Form

$$\beta_0(x) - \beta_\infty(x) = \beta_1(x).$$

Theorem 4.3 ([KMSV14], Beispiel 5.7 und Formel 5.13) *Der Epimorphismus* $\varphi_V : \triangle(3,3,5) \to A_5$ *aus Theorem 4.1 induziert die Belyĭ-Funktion*

$$\beta \colon \mathbb{P}^1 \cong \triangle(3,3,5)_{[1]} \backslash \mathbb{H} \to \triangle(3,3,5) \backslash \mathbb{H} \cong \mathbb{P}^1$$

definiert durch

$$\beta(x) = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3.$$

Es gibt

- *die Nullstellen* $\beta^{-1}(0) = \left\{0, \frac{5}{4} \pm \frac{\sqrt{15}}{12} i\right\}$ *mit der dreifachen Nullstelle* 0,
- *die Eins-Stellen* $\beta^{-1}(1) = \left\{1, -\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{15}}{12} i\right\}$ *mit der dreifachen Eins-Stelle* 1,
- *einen fünffachen Pol für* $x = \infty$*:* $\beta^{-1}(\infty) = \{\infty\}$.

Beweis. Die Riemannsche Fläche $\triangle(3,3,5)_{[1]} \backslash \mathbb{H}$ besitzt wegen Theorem 4.1(b) das Geschlecht 0 und ist somit isomorph zu $\mathbb{P}^1$. Die Belyĭ-Funktion $\beta \colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ lässt sich gemäß der direkten Methode 4.2 aus dem Ansatz

$$\beta(x) = \frac{\beta_0(x)}{\beta_\infty(x)}, \quad \beta(x) - 1 = \frac{\beta_1(x)}{\beta_\infty(x)}$$

mit $\beta_0, \beta_1, \beta_\infty \in K[x]$ für einen Zahlkörper $K \subset \overline{\mathbb{Q}}$ bestimmen. Das Verzweigungsdiagramm von β sieht so aus:

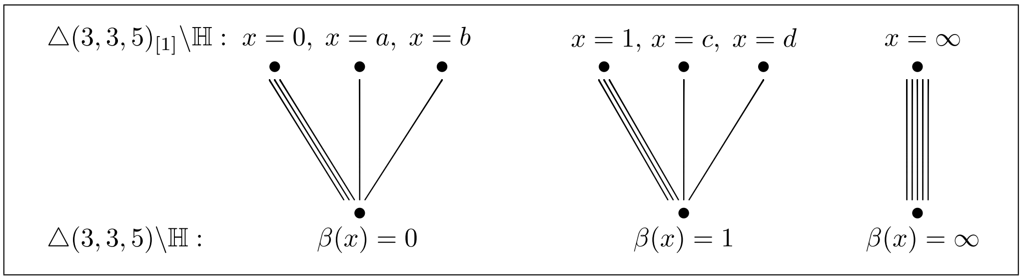

Abbildung 4.1: Verzweigungsdiagramm in Anlehnung an [KMSV14], Bild 19

Über ∞ liegt ein einzelner Punkt der Vielfachheit 5. Dieser fünffache Pol von β wird von $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ festgehalten und kann als ∞ gewählt werden. Damit kann β sogar als Polynom $\beta \in K[x]$ realisiert werden. Über der 0 und der 1 liegen jeweils ein Punkt der Vielfachheit 3 und zwei Punkte der Vielfachheit 1. Die Verzweigungspunkte über 0 bzw. 1 werden als 0 bzw. 1 gewählt. Damit gilt:

- Urbild von ∞ ist $\beta^{-1}(\infty) = \{\infty\}$ (fünffach) $\Rightarrow \beta_\infty(x) \equiv 1$
- Urbild von 0 ist $\beta^{-1}(0) = \{0, a, b\}$ (0 dreifach) $\Rightarrow \beta_0(x) = x^3(a_2x^2 + a_1x + a_0)$

für geeignete Koeffizienten $a_2, a_1, a_0 \in K$ mit $a_2 \neq 0$ (Polynomgrad ist 5), $a_1 \neq 0$ (Nullstellen sind verschieden: $a \neq b$) und $a_0 \neq 0$ (0 ist eine dreifache Nullstelle). Weiter gilt:

- Urbild von 1 ist $\beta^{-1}(1) = \{1, c, d\}$ (1 dreifach) $\Rightarrow \beta_1(x) = (x-1)^3(b_2x^2 + b_1x + b_0)$

für geeignete Koeffizienten $b_2, b_1, b_0 \in K$ mit $b_2 \neq 0$ (Polynomgrad ist 5), $b_1 \neq 0$ (1-Stellen sind verschieden: $c \neq d$) und $b_2 + b_1 + b_0 \neq 0$ (1 ist eine dreifache 1-Stelle). Der Ansatz 4.2 ergibt damit die Gleichung

$$\begin{aligned} &\beta_0(x) - \beta_\infty(x) = \beta_1(x) \\ &x^3(a_2x^2 + a_1x + a_0) - 1 = (x-1)^3(b_2x^2 + b_1x + b_0) \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} &a_2 - b_2 = 0, \qquad a_1 - b_1 + 3b_2 = 0, \qquad a_0 - b_0 + 3b_1 - 3b_2 = 0, \\ &3b_0 - 3b_1 + b_2 = 0, \qquad b_1 - 3b_0 = 0, \qquad b_0 - 1 = 0 \end{aligned}$$

mit der eindeutigen Lösung

$$(a_2, a_1, a_0, b_2, b_1, b_0) = (6, -15, 10, 6, 3, 1).$$

Somit lautet die Belyĭ-Funktion

$$\begin{aligned}\beta(x) &= x^3(6x^2 - 15x + 10)\\ &= 1 + (x-1)^3(6x^2 + 3x + 1)\\ &= 6x^5 - 15x^4 + 10x^3\end{aligned}$$

Die Funktion β ist nur verzweigt über $\{0, 1, \infty\}$, da die Nullstellenmenge der Ableitung $f'(x) = 30x^4 - 60x^3 + 30x^2 = 30x^2(x-1)^2$ genau $\{0, 1\}$ ist. □

5 Eine elliptische Belyĭ-Kurve

5.1 Geschlechtsbestimmung

Theorem 5.1 *Seien* $\varphi_1, \varphi_2 \colon \triangle(3,5,5) \to A_5$ *zwei Epimorphismen der Dreiecksgruppe* $\triangle(3,5,5) = \langle x_1, x_2, x_3 \mid x_1^3 = x_2^5 = x_3^5 = x_1x_2x_3 = 1\rangle$ *in die alternierende Gruppe* A_5*, die durch*

$$\begin{aligned}&\varphi_1(x_1) = (1\,2\,3),\ \varphi_1(x_2) = (1\,2\,3\,4\,5),\ \varphi_1(x_3) = (1\,5\,4\,2\,3),\\ &\varphi_2(x_1) = (1\,2\,4),\ \varphi_2(x_2) = (1\,2\,3\,4\,5),\ \varphi_2(x_3) = (1\,5\,2\,4\,3)\end{aligned}$$

gegeben sind. Die Urbilder der Punktstabilisatoren gemäß Definition 2.1 seien mit

$$\begin{aligned}&U_1 \overset{def}{:=} \varphi_1^{-1}(\mathrm{Stab}_{A_5}(1)) \quad \textit{und}\\ &U_2 \overset{def}{:=} \varphi_2^{-1}(\mathrm{Stab}_{A_5}(1))\end{aligned}$$

bezeichnet. Dann gilt:

(a) *Der Index des Punktstabilisators ist jeweils* $[\triangle(3,5,5) \colon U_1] = [\triangle(3,5,5) \colon U_2] = 5$.

(b) *Die Quotienten der Punktstabilisatoren besitzen jeweils das Geschlecht* $g(U_1 \backslash \mathbb{H}) = g(U_2 \backslash \mathbb{H}) = 1$.

(c) *Die Quotienten der Normalteiler besitzen jeweils das Geschlecht* $g(\ker \varphi_1 \backslash \mathbb{H}) = g(\ker \varphi_2 \backslash \mathbb{H}) = 9$.

(d) *Der Normalteiler* $\ker \varphi_1$ *trägt Marston Conders Bezeichnung T9.39 und besitzt die Präsentation*

$$\langle x_1, x_2, x_3 \mid x_1^3 = x_2^5 = x_1x_2x_3 = (x_2x_3^{-1})^2 = x_3x_1^2x_2^4x_1x_2^4x_1 = 1\rangle.$$

(e) *Der Normalteiler* $\ker \varphi_2$ *trägt Marston Conders Bezeichnung T9.38 und besitzt die Präsentation*

$$\langle x_1, x_2, x_3 \mid x_1^3 = x_2^5 = x_1x_2x_3 = x_1^2x_2^4x_1x_3 = 1\rangle.$$

Beweis.

(a) Der Punktstabilisator besitzt in beiden Fällen den Index

$$d = [A_5 : \mathrm{Stab}_{A_5}(1)] = [A_5 : \{\sigma \in A_5 \mid 1^\sigma = 1\}] = [A_5 : A_4] = 5.$$

(b) Für das Geschlecht $g_1 = g(U_{1,2} \backslash \mathbb{H})$ folgt aus Theorem 3.1(c):

$$\begin{aligned}&2g_1 - 2 = (0-2)\cdot 5 + (2+4+4)\\ &\Leftrightarrow g_1 = 1\end{aligned}$$

(c) Für das Geschlecht $g_2 = g(\ker \varphi_{1,2} \backslash \mathbb{H})$ folgt aus Theorem 3.1(b):

$$\begin{aligned}&2g_2 - 2 = |A_5| \cdot (2\cdot 0 - 2) + |A_5| \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{5} + 1 - \frac{1}{5}\right)\\ &\Leftrightarrow g_2 = 9\end{aligned}$$

(d),(e) Nach [Con15] gibt es für die Dreiecksgruppe $\triangle(3,5,5)$ genau diese beiden Normalteiler T9.39 und T9.38 mit Faktorgruppe A_5 bis auf Isomorphie, Dualität und Spiegelung. □

5.2 Gleichung für $\triangle(3,5,5) \to A_5$

Theorem 5.2

(a) *Der in Theorem 5.1 definierte Epimorphismus* $\varphi_1\colon \triangle(3,5,5) \to A_5$ *induziert die Belyĭ-Funktion*

$$\beta_1\colon E_1 = U_1\backslash\mathbb{H} \to \triangle(3,5,5)\backslash\mathbb{H} \cong \mathbb{P}^1$$

auf der elliptischen Kurve

$$E_1\colon y^2 + xy = x^3 - 28x + 272$$

(Cremona-Klassifikation 150-A3, Antwerp 150C) mit 5-Torsionspunkt $(-4,-16)$. *Die (hier nicht auf* $\{0,1,\infty\}$ *normalisierte) Belyĭ-Funktion* $\beta_1\colon E_1 \to \mathbb{P}^1$ *ist definiert durch*

$$\beta_1\colon (x,y) \mapsto -2x^2 + 9x + 212 + (x+13)\,y$$

und über $\{0,432,\infty\}$ *verzweigt. Die Divisoren von* β_1 *und dem Differential* $d\beta_1$ *lauten*

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\beta_1) &= 5\,[(-4,-16)] - 5\,[\mathcal{O}], \\ \operatorname{div}(d\beta_1) &= 4\,[(-4,-16)] + 2\,[(2,14)] - 6\,[\mathcal{O}]. \end{aligned}$$

(b) *Der in Theorem 5.1 definierte Epimorphismus* $\varphi_2\colon \triangle(3,5,5) \to A_5$ *induziert die Belyĭ-Funktion*

$$\beta_2\colon E_2 = U_2\backslash\mathbb{H} \to \triangle(3,5,5)\backslash\mathbb{H} \cong \mathbb{P}^1$$

auf der elliptischen Kurve

$$E_2\colon y^2 + y = x^3 + x^2 + 2x + 4$$

(Cremona-Klassifikation 75-C1, Antwerp 75C) mit 5-Torsionspunkt $(2,4)$. *Die (hier nicht auf* $\{0,1,\infty\}$ *normalisierte) Belyĭ-Funktion* $\beta_2\colon E_2 \to \mathbb{P}^1$ *ist definiert durch*

$$\beta_2\colon (x,y) \mapsto 5x^2 + 2x + 12 - (x+7)\,y$$

und über $\{0,27,\infty\}$ *verzweigt. Die Divisoren von* β_2 *und dem Differential* $d\beta_2$ *lauten*

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\beta_2) &= 5\,[(2,4)] - 5\,[\mathcal{O}], \\ \operatorname{div}(d\beta_2) &= 4\,[(2,4)] + 2\,[(-1,-2)] - 6\,[\mathcal{O}]. \end{aligned}$$

Beweis. Wegen Geschlecht 1 sind die Riemannschen Flächen $U_1\backslash\mathbb{H}$ und $U_2\backslash\mathbb{H}$ elliptische Kurven. Die Bestimmung der Gleichung der elliptischen Kurven und der Belyĭ-Funktionen gestaltet sich hier einfach, da die Dreiecksgruppe die spezielle Form $\triangle(3,n,n)$ besitzt.

Beide Fälle (a) und (b) lassen sich gemeinsam betrachten. Sei E eine elliptische Kurve über $\mathbb{C}$, die so gewählt wurde, dass $(0,0) \in E$ gilt. Sei $\mathcal{O} \in E$ der Basispunkt. Dann kann die Belyĭ-Funktion β so gewählt werden, dass gilt:

- β hat eine 5-fache Nullstelle für $(0,0) \in E$,
- β hat einen 5-fachen Pol für $\mathcal{O} \in E$,
- β hat keine weiteren Nullstellen und Pole.

Somit besitzt die elliptische Funktion β den Divisor

$$\operatorname{div}(\beta) = 5\,[(0,0)] - 5\,[\mathcal{O}].$$

Nach [Sil86], Korollar III.3.5 folgt daraus sofort $5\cdot(0,0) - 5\cdot\mathcal{O} = \mathcal{O}$ und damit $5\cdot(0,0) = \mathcal{O}$. Die elliptische Kurve E besitzt also einen 5-Torsionspunkt $(0,0)$ und die meromorphe Funktion β heißt Weil-Funktion für den Torsionspunkt $(0,0)$. Elliptische Kurven mit 5-Torsionspunkt $(0,0)$ werden parametrisiert durch die modulare Kurve $X_1(5)$ und besitzen die Form

$$\mathcal{E}_c\colon y^2 + (c+1)xy + cy = x^3 + cx^2$$

mit dem komplexen Parameter $c \in \mathbb{C} \setminus \{0, -\frac{11}{2} \pm \frac{5}{2}\sqrt{5}\}$. Die Weil-Funktion β lässt sich durch verschiedene Ansätze bestimmen, beispielsweise durch Faktorisierung anderer elliptischer Funktionen. So besitzt die Funktion

$$T_c \colon \mathcal{E}_c \to \mathbb{P}^1, \quad T_c(x,y) = -x^5$$

den Divisor

$$\operatorname{div}(T_c) = 5\,[P] + 5\,[-P] - 10\,[\mathcal{O}],$$

falls man abkürzend $P = (0,0)$ schreibt. Die Funktion T_c lässt sich zerlegen in ein Produkt

$$T_c(Q) = f_c(Q) \cdot \tilde{f}_c(Q) = f_c(Q) \cdot f_c(-Q)$$

für alle Punkte $Q \in \mathcal{E}_c$. Gemäß Additionsgesetz auf der elliptischen Kurve $\mathcal{E}_c$ gilt für das additive Inverse

$$-(x_0, y_0) = (x_0, -y_0 - (c+1)x_0 - c).$$

Die Funktion T_c wird damit zerlegt in ein Produkt von zwei Funktionen mit Divisoren

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div}(f_c) = 5\,[P] - 5\,[\mathcal{O}] \quad \text{und} \\
&\operatorname{div}(\tilde{f}_c) = 5\,[-P] - 5\,[\mathcal{O}].
\end{aligned}$$

Die Zerlegung lautet

$$\begin{aligned}
-x^5 &= f_c(x,y) \cdot \tilde{f}_c(x,y) \\
&= f_c(x,y) \cdot f_c(x, -y - (c+1)x - c) \\
&= \left[-x^2 + xy + y\right] \cdot \left[-(c+2)x^2 - (2c+y+1)x - y - c\right]
\end{aligned}$$

Man erhält diese Faktorisierung aus dem Ansatz $f_c(x,y) = Ax^2 + Bx + Cy + Dxy$ und Koeffizientenvergleich, falls man höhere Potenzen als x^2 mit Hilfe der Definitionsgleichung der elliptischen Kurve $\mathcal{E}_c$ durch kleinere Potenzen ersetzt. Im Ergebnis erhält man, dass die elliptische Kurve

$$\mathcal{E}_c \colon y^2 + (c+1)xy + cy^2 = x^3 + cx^2$$

den 5-Torsionpunkt $P = (0,0)$ mit Weil-Funktion

$$f_c(x,y) = -x^2 + xy + y$$

und Divisor

$$\operatorname{div}(f_c) = 5\,[P] - 5\,[\mathcal{O}]$$

besitzt. Das Differential $\mathrm{d}f_c$ besitzt dann den Divisor

$$\operatorname{div}(\mathrm{d}f_c) = 4\,[P] + [B_1] + [B_2] - 6\,[\mathcal{O}]$$

mit zwei weiteren Verzweigungspunkten $B_1, B_2 \in \mathcal{E}_c$. Damit f_c eine Belyĭ-Funktion ist, müssen diese beiden Verzweigungspunkte zusammenfallen: $B_1 = B_2$. Diese Bedingung ist nur erfüllt für

- $c = -\frac{4}{3}$: Die Substitution $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ -9 & 27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -16 \end{pmatrix}$ erzeugt $\mathcal{E}_{-\frac{4}{3}} \mapsto E_1$, $f_{-\frac{4}{3}} \mapsto \beta_1$ und daraus folgt Teil (a).
- $c = \frac{1}{3}$: Die Substitution $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 18 & 27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ erzeugt $\mathcal{E}_{\frac{1}{3}} \mapsto E_2$, $f_{\frac{1}{3}} \mapsto \beta_2$ und daraus folgt Teil (b).

Die Zuordnung der c-Werte zu Teil (a) oder Teil (b) kann beispielsweise über die Betrachtung der Belyĭ-Graphen erfolgen. $\square$

Literatur

[BCC03] E. Bujalance, F. J. Cirre, M. Conder, *On extendability of group actions on compact Riemann surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), pp. 1537–1557

[Bel79] G. V. Belyĭ, *On Galois extensions of a maximal cyclotomic field*, Izv. Akad. Nauk SSSR **43** (1979), pp. 269–276 (Russisch), Math USSR Izvestiya **14** (1980), pp. 247–256 (Englische Übersetzung)

[Con15] M. Conder, *Quotients of triangle groups acting on surfaces of genus 2 to 101*, Februar 2015, `https://www.math.auckland.ac.nz/~conder/TriangleGroupQuotients101.txt`

[FK92] H. M. Farkas, I. Kra, *Riemann surfaces*, Second edition, Springer Verlag, New York, 1992

[Sil86] J.H. Silverman, *The Arithmetic of Elliptic Curves*, Springer Verlag, New York, 1986

[SIS97] D. Singerman, R. I. Syddall, *Belyi uniformization of elliptic curves*, Bull. London Math. Soc. **29** (1997), pp. 443–451

[SV14] J. Sijsling, J. Voight, *On computing Belyi maps*, Publ. Math. Besançon: Algèbre Théorie Nr. 2014/1, Presses Univ. Franche-Comté, Besançon, pp. 73–131

[KMSV14] M. Klug, M. Musty, S. Schiavone, J. Voight, *Numerical calculation of three-point branched covers of the projective line*, LMS J. Comput. Math. **17** (1) (2014), pp. 379–430

[LZ04] S.K. Lando, A.K. Zvonkin, *Graphs on surfaces and their applications*, Springer Verlag, Berlin, 2004

[Wol97] J. Wolfart, *The 'obvious' part of Belyi's theorem and Riemann surfaces with many automorphisms*, pp. 97–112 in L. Schneps, P. Lochak, *Geometric Galois Actions*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 242, Cambridge University Press, 1997